WUHAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

机械工程中的数值方法基础

Numerical Solution Methods for Engineering Analysis

第一章 绪论

日 期： 2026/6/1

目录 / Contents

01 课程简介

02 误差分析

教材

- 《数值分析（第四版）》，李庆扬、王能超、易大义，清华大学出版社，2001.
- 《数值分析（第五版）》，李庆扬、王能超、易大义，清华大学出版社，2008.

教 师 信 息

- 吴姝　副教授　wushu@whut.edu.cn　13554185819
- 沈嘉禾 副教授　jiahe.shen@whut.edu.cn　18872277195

第一节 简介

机械工程中的数值方法基础

Numerical Solution Methods for Engineering Analysis

数值分析、计算方法（ **numeric analysis** ）

研究数学问题的计算机（数值）解

实际问题 → 数学模型 → 数值计算方法 → 程序设计 → 上机计算求得结果

针对实际问题应用有关科学知识和数学理论，建立数学模型这一过程，通常作为应用数学的研究对象，而根据数学模型提出求解的数值计算方法，直到编出程序上机算出结果这一过程，则是计算数学的研究对象，也是数值分析的研究对象。

- 是研究用计算机解决数学问题的数值方法及其理论，它的内容包括函数的数值逼近、数值微分与数值积分、非线性方程数值解、数值线性代数、微分方程数值解等，它们都是以数学问题为研究对象。
- 是数学的一个分支，只是它不像纯数学那样只研究数学本身的理论，而是把理论与计算紧密结合起来，着重研究数学问题的数值方法及其理论。

第一节 简介

研究适合计算机使用的、满足精度要求的、计算省时间的有效算法及其相关的理论；在实现这些算法时往往还要根据计算机容量、字长、速度等指标，研究具体求解步骤和程序设计技巧；有的方法在理论上虽不够严格，但通过实际计算、对比分析等手段，只要能证明它们是行之有效的方法，也应采用。

特点

- 面向计算机，算法只能包括加、减、乘、除运算和逻辑运算
- 有可靠的理论分析，能任意逼近并达到精度要求，保证收敛性和数值稳定性
- 有好的计算复杂性，时间复杂性好是指节省时间，空间复杂性好是指节省存储量
- 有数值实验，通过数值实验证明它是行之有效的

应用

工科专业（如信息、机械、航空航天、土木水利、人工智能）

解决各种问题都需要很多数学手段

—— 需要利用计算机来求解这些数学问题

几个数值计算应用的例子

学了数学课后，为什么还要学习这门课？

1. 水库储水量测算

2. 经济增长预测（从历年数据总计规律）

3. 信号（图像）变换（数据压缩）与反变换

4. 卫星发射设计与控制

产生误差！

误差需要控制在应用需求的范围内

共同特点：

数学模型←→计算

连续情形　　数字化（离散）

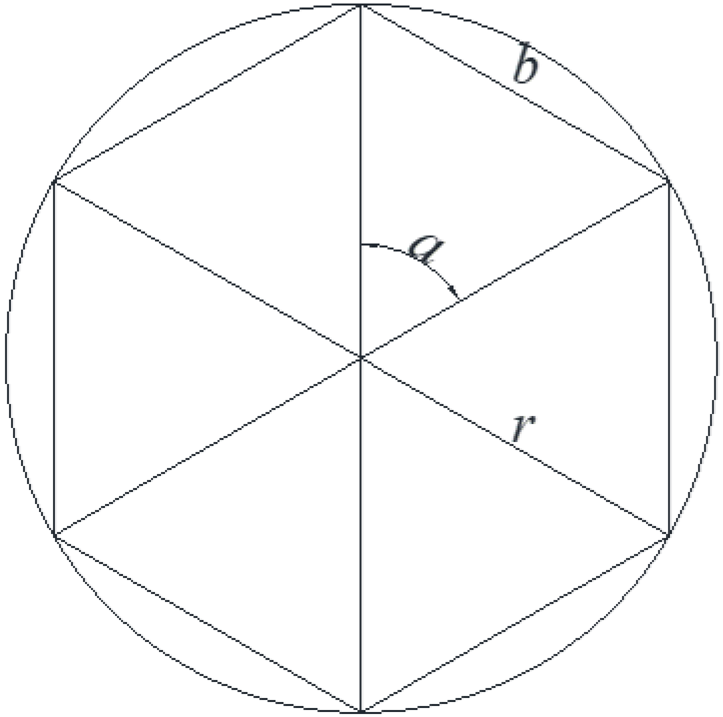
求圆的周长（ **r=1** ）

1. 方法：用内接 **n** 等边多边形来近似圆

2. 是否能收敛到圆

3.n=m 时误差有多大？（建立误差分析公式）

4. 计算机存储误差的影响 （误差累积，如何计算？



课程内容

1. 函数的逼近：插值、最佳逼近、拟合

2. 数值积分、微分

3. 线性代数方程组求解

4. 非线性方程求解

问题：与 **Matlab** 等工具相比，本课程的意义？

1. 要知其然，还要知其所以然

2. 科研、应用中很多问题无法直接用现成的工具解决

3. Matlab 等工具无法做误差分析

主要掌握：

1. 误差分析（包括收敛性和稳定性分析）

2. 数值计算的基本原理和方法

---- 注重基本原理和概念的掌握，强调理论与实践的结合，锻炼解决实际问题的能力和自学的能力

要求：

按时上课，按要求、独立完成每次课堂作业和课后作业，积极参加课堂讨论

考查方式：

作业 **30%**+ 课堂表现 **20%**+ 期末考试（闭卷）**50%**

一、误差来源

1. 模型误差

2. 观测误差（测量误差）

观测误差

对最后结果的影响相似，通过计算公式累计变化

舍入误差

$$f(x)=f(x^*)+f'(x^*)(x-x^*)+\frac{f^{(2)}(x^*)}{2!}(x-x^*)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x^*)}{n!}(x-x^*)^n+R_{n+1}(x)$$

3. 方法误差（截断误差）

方法误差

$$R_{n+1}(x)=\int_{x^*}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

前者是指将对象进行数学化带来的误差，

后者是指进一步写成计算公式时带来的误差。

4. 舍入误差（计算机字节长度有限）

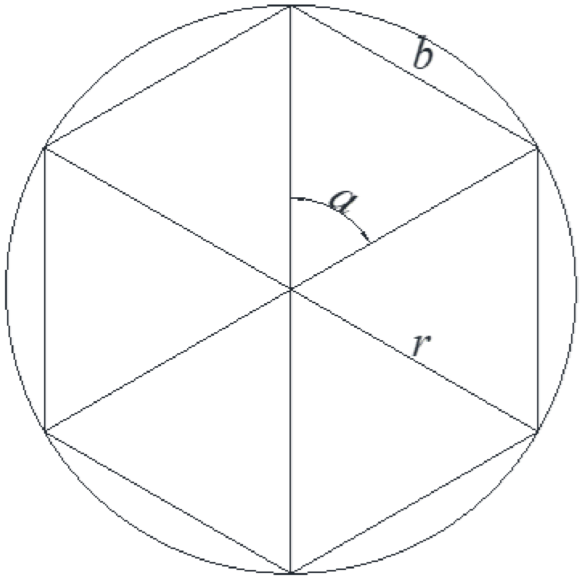
例：用内接 **n** 多边形周长近似圆（ **r=1** ）周长

1. 观测误差——无

2. 模型误差——无（因可证明收敛到圆周长）

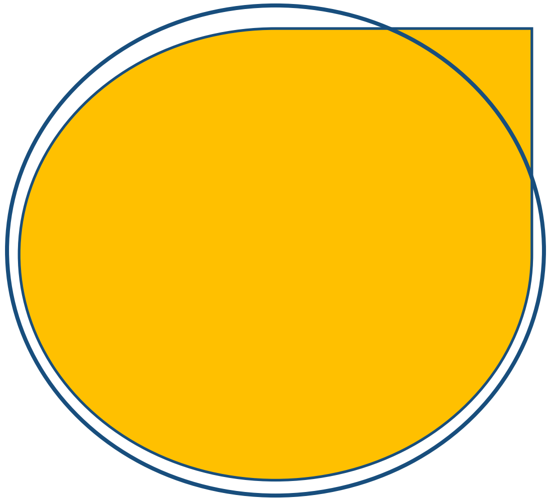
3. 方法误差——迭代停止后的理想值与 2π 的差

4. 舍入误差——每步都有（计算中间结果存贮），需累积



例：求不规则形状的周长

用圆近似，进而用内接 n 多边形来逼近求周长——模型误差



例：$$e^{-1}=1+(-1)+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{(-1)^3}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^k}{k!}+\cdots$$

取 $k=7$, $e^{-1} \doteq 0.3678571\cdots$

$$R_8 \le \frac{1}{8!} < \frac{1}{4}\times 10^{-4}$$ —— 截断误差

$$e^{-1} \doteq 0.3679$$ —— 舍入误差

例：近似计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$

解法之一：将e^{-x^2}作Taylor展开后再积分

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx=\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}-\cdots\right)dx$$

$$=\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!}\times\frac{1}{5}-\frac{1}{3!}\times\frac{1}{7}}_{S_4}+\underbrace{\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9}-\cdots}_{R_4}$$

取 $\int_0^1 e^{-x^2}dx\approx S_4$ 则 $R_4=\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9}-\frac{1}{5!}\times\frac{1}{11}+\cdots$ 称为截断误差 $R_4<\frac{1}{4!}\times\frac{1}{9}<0.005$

$$S_4=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}\approx 1-0.333+0.1-0.024=0.743$$

|舍入误差| $<0.0005\times 2=0.001$

|计算 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的总体误差| $<0.005+0.001=0.006$

例：计算 $I_n = \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^x dx \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$

公式一： $I_n = 1 - nI_{n-1}$

初始值 $I_0 = \frac{1}{e}\int_0^1 e^x dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212056 = I_0^*$

初始误差 $|E_0| = |I_0 - I_0^*| < 0.5 \times 10^{-8}$

积分的范围估计

$$\frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^0 dx < I_n < \frac{1}{e}\int_0^1 x^n e^1 dx$$

$$\therefore \frac{1}{e(n+1)} < I_n < \frac{1}{n+1}$$

$I_1^* = 1 - 1 \cdot I_0^* = 0.36787944$

$\cdots\cdots\cdots$

$I_{10}^* = 1 - 10 \cdot I_9^* = 0.08812800$

$I_{11}^* = 1 - 11 \cdot I_{10}^* = 0.03059200$

$I_{12}^* = 1 - 12 \cdot I_{11}^* = 0.63289600$?

$I_{13}^* = 1 - 13 \cdot I_{12}^* = -7.2276480$

$I_{14}^* = 1 - 14 \cdot I_{13}^* = 94.959424$

$I_{15}^* = 1 - 15 \cdot I_{14}^* = -1423.3914$

观测误差和舍入误差会随着公式计算累积变化

考察第n步的误差$|E_n|$

$$|E_n| = |I_n - I_n^*| = |(1-nI_{n-1})-(1-nI_{n-1}^*)| = n|E_{n-1}| = \cdots = n!|E_0|$$

可见初始的小扰动$|E_0|=0.5\times 10^{-8}$迅速积累，误差呈递增走势。

造成这种情况的是不稳定的算法。

公式二： $I_{n-1} = \frac{1}{n}(1-I_n)$ 方法：先估计一个I_N，再反推要求的$I_n (n \ll N)$

$$\because \frac{1}{e(N+1)} < I_N < \frac{1}{N+1}$$

可取 $I_N^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e(N+1)} + \frac{1}{N+1}\right] \approx I_N$

当$N \to +\infty$时， $|E_N| = |I_N - I_N^*| \to 0$

$$I_{15}^* = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{e\cdot 16}+\frac{1}{16}\right] \approx 0.042746233$$

$$I_{14}^* = \frac{1}{15}\left[1-I_{15}^*\right] \approx 0.063816918$$

$$I_{13}^* = \frac{1}{14}\left[1-I_{14}^*\right] \approx 0.066870220$$

$$I_{12}^* = \frac{1}{13}\left[1-I_{13}^*\right] \approx 0.071779214$$

$$I_{11}^* = \frac{1}{12}\left[1-I_{12}^*\right] \approx 0.077351732$$

$$\vdots$$

$$I_1^* = \frac{1}{2}\left[1-I_2^*\right] \approx 0.36787944$$

$$I_0^* = \frac{1}{1}\left[1-I_1^*\right] \approx 0.63212056$$

考察反推一步误差$|E_{N-1}|$

$$|E_{N-1}| = \left|\frac{1}{N}(1-I_N)-\frac{1}{N}(1-I_N^*)\right| = \frac{1}{N}|E_N|$$

依次类推，对于$n<N$有

$$|E_n| = \frac{1}{N(N-1)\cdots(n+1)}|E_N|$$

误差逐步递减，这样的算法称为稳定的算法。

二、误差衡量

x 准确值　　x^* 近似值

绝对误差：$|\Delta x| = |x - x^*|$

相对误差：$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \doteq \left|\frac{\Delta x}{x^*}\right|$

三、有效数字（教材 P6）

$$x = 1.2345678$$

四位有效数字

187.9325　0.0378551　8.000033

187.9　0.03786　8.000

三位有效数字 $x^* = 1.23$

$$|\Delta x| \le 0.5 \times 10^{-2}$$

五位有效数字 $x^* = 1.2346$

$$|\Delta x| \le 0.5 \times 10^{-4}$$

若近似值 x^* 的误差限是某一位的半个单位，该位到 x^* 的第一位非零数字共有 n 位，就说 x^* 有 n 位有效数字。如取 $x^* = 3.14$ 作 π 的近似值，x^* 就有三位有效数字；取 $x^* = 3.1416$ 作 π 的近似值，x^* 就有五位有效数字。x^* 有 n 位有效数字可写成标准形式

$$x^* = \pm 10^m \times (a_1 + a_2 \times 10^{-1} + \cdots + a_n \times 10^{-(n-1)}), \qquad (1.3.1)$$

其中，a_1 是 1 到 9 中的一个数字；$a_2, \cdots, a_n$ 是 0 到 9 中的一个数字；m 为整数，且

有效数字——绝对误差限 $\varepsilon^* = \frac{1}{2} \times 10^{m-n+1}$

有效数字——相对误差限 $\varepsilon_r^* = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$

思考：重力加速度的有效数字、绝对误差限、相对误差限分别是多少？

$g \approx 9.80\ m/s^2$ $g \approx 0.00980\ km/s^2$

例 1.3 重力常数 g，如果以 m/s^2 为单位，$g \approx 9.80\ m/s^2$；若以 km/s^2 为单位，$g \approx 0.009\ 80\ km/s^2$，它们都具有三位有效数字. 按第一种写法，有

$$|g - 9.80| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-2},$$

据式(1.3.1)，这里 $m=0$，$n=3$；按第二种写法，有

$$|g - 0.009\ 80| \leqslant \frac{1}{2} \times 10^{-5},$$

这里 $m=-3$，$n=3$. 它们虽然写法不同，但都具有三位有效数字. 至于绝对误差限，由于单位不同，结果也不同，$\varepsilon_1^* = \frac{1}{2} \times 10^{-2}\ m/s^2$，$\varepsilon_2^* = \frac{1}{2} \times 10^{-5}\ km/s^2$，而相对误差都是

$$\varepsilon_r^* = 0.005/9.80 = 0.000\ 005/0.009\ 80.$$

思考：

二进制时如何考虑有效数字问题？

$x = 10.0101011$

误差上限

四位有效数字 $x^* = 10.01$ $|\Delta x| \le 0.5 \times 2^{-2}$

五位有效数字 $x^* = 10.011$ $|\Delta x| \le 0.5 \times 2^{-3}$

六位有效数字 $x^* = 10.0101$ $|\Delta x| \le 0.5 \times 2^{-4}$

四、多元函数的误差估计

$$A = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$A^* = f(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$$

$$\Delta A = A - A^* \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^*(x_1 - x_1^*) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^*(x_2 - x_2^*) + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^*(x_n - x_n^*) + O^2(\Delta x)$$

近似有

$$|\Delta A| \le \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^*\right| |\Delta x_1| + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^*\right| |\Delta x_2| + \cdots + \left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^*\right| |\Delta x_n|$$

以上不等式是近似的：如果要精确的分析误差上限，则有

$$|\Delta A| \le \max\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^*\right||\Delta x_1| + \max\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^*\right||\Delta x_2| + \cdots + \max\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^*\right||\Delta x_n|$$

如何推导上述不等式？为什么？

$$|\Delta A| = \left|f(x) - f(x^*)\right| = |f'(\xi)|\left|(x - x^*)\right| \le \max|f'(x)||\Delta x|$$

微分中值定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，则在 (a,b) 至少存在一点 ξ，$a<\xi<b$

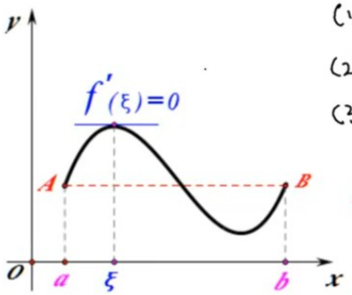
使得等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立

微分中值定理：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，(a,b) 可导，则在 (a,b) 至少存在一点 ξ，$a<\xi<b$，使得等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ 成立

罗尔中值定理：若函数 $f(x)$ 满足以下条件

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续
(2)在开区间 (a,b) 内可导
(3) $f(a)=f(b)$

则：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

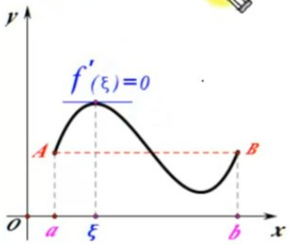


证明：由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.
知：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一定存在最大值与最小值.
不妨令 $f(x)_{max}=m$，$f(x)_{min}=n$，显然：$m\geq n$.
(1).若 $m=n$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是常函数，结论显然成立.
(2)若 $m>n$，由 $f(a)=f(b)$ 知. m 与 n 至少有一个在 (a,b) 内某个点 ξ 处取得. 即 ξ 是 $f(x)$ 在 (a,b) 上的一个极值点.
由 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，易知：$f'(\xi)=0$.

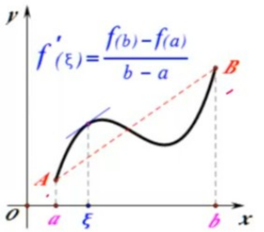
罗尔中值定理：若函数 $f(x)$ 满足以下条件

(1)在闭区间 $[a,b]$ 上连续
(2)在开区间 (a,b) 内可导
(3) $f(a)=f(b)$

则：至少存在一个 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.



拉格朗日中值定理



$F(x)=?$ $\quad F'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(x)$

$$F(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x-f(x)+C$$

$$F(a)=F(b)=\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot a-f(a)\right]-\left[\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot b-f(b)\right]$$

$$=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(a-b)+[f(b)-f(a)]=0$$

例 1 ：比较 $\sqrt{2}-1$ 和 $1/\left(\sqrt{2}+1\right)$ 的误差，其中 $\sqrt{2}$ 取 1.414

$$f(x)=x-1 \qquad f'(x)=(x-1)'=1$$

$$\left|f(x)-f\left(x^*\right)\right| \le \max\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*\right|\left|\Delta x\right| = 1\cdot\left|\Delta x\right| = 1\times\frac{1}{2}\times10^{-3} = 0.5\times10^{-3}$$

$\sqrt{2}$ *的精确值的范围*（1.4135,1.4145）

$$f(x)=\frac{1}{x+1} \qquad f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\left|f(x)-f\left(x^*\right)\right| \le \max\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^*\right|\left|\Delta x\right| = \frac{1}{(1.4135+1)^2}\cdot\left|\Delta x\right| = 0.2\times10^{-3}$$

例 2 ：当取 $\sqrt{3}=1.732$时，试分析 $f(x)=x$ 误差上限。具体的，当 $f(x)=x^2$ 是如何？

$$f(x)=x \qquad f'(x)=1$$

$$\left|f(x)-f(x^*)\right| \le \max\left|f'(x)^*\right|\left|\Delta x\right| = \left|\Delta x\right| = \frac{1}{2}\times 10^{-3}$$

$$f(x)=x^2 \qquad f'(x)=2x$$

$$\left|f(x)-f(x^*)\right| \le \max\left|f'(x)^*\right|\left|\Delta x\right| = 2\left|x\right|\left|\Delta x\right| = 2\times 1.7325\times\frac{1}{2}\times 10^{-3} \le 2\times 10^{-3}$$

五、数值计算的基本原则

1. 选择数值稳定性好的计算公式

$$I_n = 1 - nI_{n-1}$$

$$I_n = \frac{1 - I_{n-1}}{n}$$

2. 防止被除数远大于除数

$$\begin{cases} 0.00001x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

（当先求取x_2,再代入第一式中求去x_1时）

3. 防止相近的数相减

$$\begin{cases} 1 - \cos 1^\circ = 1 - 0.9998 = 0.0002 \\ 2\sin^2 0.5^\circ = 1.523 \times 10^{-4} \end{cases}$$

4. 防止大数吃掉小数

$$12345 + (0.1 + 0.2 + 0.3 + \cdots)$$

—— 先加括号内的小数

5. 简化计算步骤 +-×÷

例：计算 x^{255} 的值。

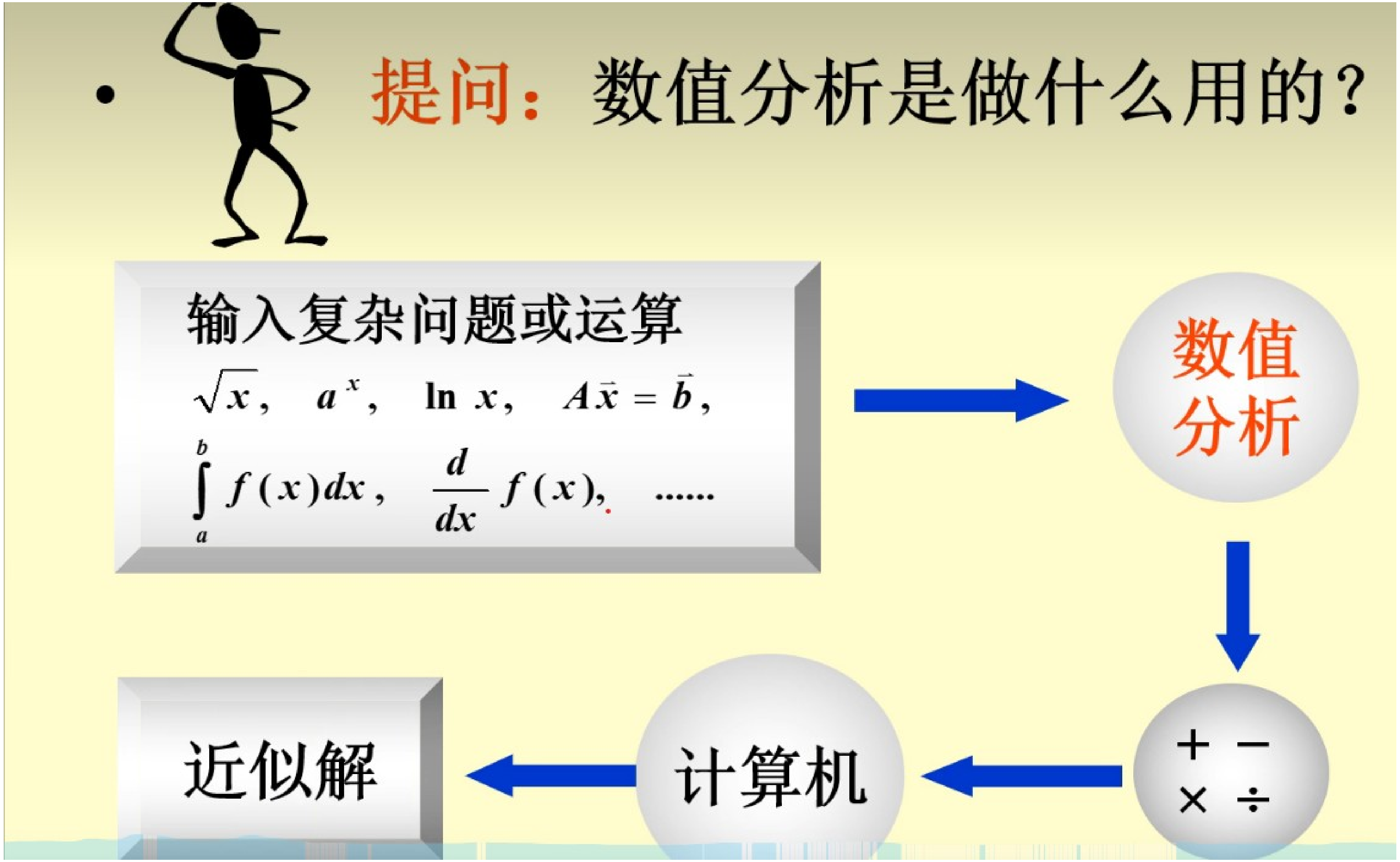
$$x^{255} = x x^2 x^4 x^8 x^{16} x^{32} x^{64} x^{128}$$

只需 14 次乘法。

$$x^{255} = (((((((((x^2)))))))))/x$$

只需？次乘法。

$$\sum_{n=1}^{1000} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{1000} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{1001}$$



• 提问：数值分析是做什么用的？
输入复杂问题或运算
$\sqrt{x}$, a^x, $\ln x$, $A\vec{x}=\vec{b}$,
$\int_a^b f(x)dx$, $\frac{d}{dx}f(x)$, ...
数值分析
+ − × ÷
计算机
近似解

一元函数泰勒展开

$$f(x)=f\left(x^*\right)+f'\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)+\frac{f^{(2)}\left(x^*\right)}{2!}\left(x-x^*\right)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(x^*\right)}{2!}\left(x-x^*\right)^n+R_{n+1}(x)$$

$$R_{n+1}(x)=\int_{x^*}^{x}\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt$$

$$f(x)-f\left(x^*\right)=f'\left(x^*\right)\left(x-x^*\right)+\frac{f^{(2)}\left(x^*\right)}{2!}\left(x-x^*\right)^2+R_3(x)$$

$$\Delta f=f'\left(x^*\right)\Delta x+\frac{f^{(2)}\left(x^*\right)}{2!}\Delta x^2+R_3(x)$$

二元函数泰勒展开

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(y-y_0)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x_0,y_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x_0,y_0)(y-y_0)^2+O^3$$

$f(x,y)$一次展开式

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$=[\frac{\partial}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial}{\partial y}(y-y_0)]f(x_0,y_0)$$

谢　谢！

日　期： **2026/6/1**